ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI TRỌNG QUYẾT

ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN TRONG LỚP ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC HỮU TỶ VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI TRỌNG QUYẾT

ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN TRONG LỚP ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC HỮU TỶ VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

Mở đầu

Chuyên đề tích phân có vị trí rất đặc biệt trong toán học, nó không những là đối tượng nghiên cứu trọng tâm của giải tích mà còn là công cụ đắc lực trong lý thuyết hàm số và các ứng dụng liên quan. Ngoài ra, bản thân phép tính tích phân còn được sử dụng nhiều trong vật lý, thiên văn học, cơ học, y học,... như một giải pháp hữu hiệu của các mô hình toán học cụ thể.

Trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán quốc gia, Olympic Toán sinh viên thì các bài toán liên quan đến tích phân cũng hay được đề cập và được xem như là những dạng toán loại khó.

Lý thuyết và các bài toán về tích phân đã được đề cập ở hầu hết các giáo trình cơ bản về giải tích. Tuy nhiên, các tài liệu hệ thống về phép tính tích phân cho lớp hàm đa thức và phân thức như là một chuyên đề chọn lọc cho giáo viên và học sinh cuối bậc trung học phổ thông và sinh viên các trường kỹ thuật thì chưa có nhiều, chưa được hệ thống đầy đủ.

Để đáp ứng cho nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề phép tính tích phân và ứng dụng, tác giả chọn đề tài luận văn "Đẳng thức, bất đẳng thức tích phân trong lớp đa thức và phân thức hữu tỷ và một số dạng toán liên quan" nhằm cung cấp một số tính chất cơ bản của tích phân hàm một biến và cho phân loại các dạng toán ứng dụng liên quan đến đa thức và phân thức.

Mục đích của đề tài luận văn là nhằm khảo sát một số dạng toán về đẳng thức và bất đẳng thức chứa tích phân trong lớp đa thức và phân thức hữu tỷ và xét một số áp dụng trong các bài toán cực trị, khảo sát phương trình, bất phương trình đa thức và phân thức liên quan.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận và 4 chương.

Chương 1. Các đẳng thức và bất đẳng thức tích phân cơ bản

Chương 2. Các đẳng thức và bất đẳng thức tích phân trong đa thức

Chương 3. Các đẳng thức và bất đẳng thức tích phân trong lớp phân thức

Chương 4. Một số dạng toán liên quan

Tiếp theo, trong các chương đều trình bày một hệ thống bài tập, áp dụng giải các đề thi Học sinh giỏi và Olympic liên quan.

Chương 1. Đẳng thức và bất đẳng thức tích phân cơ bản

1.1 Các đồng nhất thức tích phân

1.1.1 Tính chất cơ bản của nguyên hàm

Ta sử dụng kí hiệu $I(a,b)$ là một khoảng (a,b), một đoạn $[a,b]$ hay nửa khoảng $(a,b]$ hoặc $[a,b)$ trong các định nghĩa, định lí,..của nội dung này.

Định nghĩa 1.1 (xem [1-3])**.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $I(a,b)$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $I(a,b)$ nếu hàm số $F(x)$ liên tục trên $I(a,b)$, có đạo hàm tại mọi điểm x thuộc $I(a,b)$ và

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I(a,b).$$

Chú ý 1.1. Trong trường hợp $I(a,b) = [a;b]$, các đẳng thức $F'(a) = f(a), F'(b) = f(b)$ được hiểu là

$$F'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a},$$
$$F'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b}.$$

Định lý 1.1 (Về sự tồn tại nguyên hàm)**.** Mọi hàm số liên tục trên $I(a,b)$ đều có nguyên hàm trên $I(a,b)$.

Định lý 1.2.
1) Nếu hàm số $f(x)$ có nguyên hàm $F(x)$ trên $I(a,b)$ thì trên $I(a,b)$ nó có vô số nguyên hàm.
2) Hai nguyên hàm bất kì của cùng một hàm cho trên $I(a,b)$ là sai khác nhau một hằng số cộng.

Từ Định lí 1.2, ta thấy nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $I(a,b)$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên $I(a,b)$ đều có dạng $F(x)+C$, với $C \in \mathbb{R}$. Vậy $F(x)+C, \ \ C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên $I(a,b)$.

Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên $I(a,b)$ được kí hiệu là $\int f(x)dx$. Vậy

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Định lý 1.3 (Tính chất của nguyên hàm)**.**

$$i) \ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad ii) \ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

$$iii) \ \int df(x) = f(x) + C.$$

Định lý 1.4 (Quy tắc tìm nguyên hàm)**.**

$$i) \ \int kf(x)dx = k\int f(x)dx \ \ (k \neq 0),$$

$$ii) \ \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$iii) \ \int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

trong đó $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục.
iv) Quy tắc lấy nguyên hàm từng phần

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

trong đó $u = u(x), v = v(x)$ là những hàm số có đạo hàm liên tục.

1.1.2 Một số tính chất của tích phân xác định

Ta nhắc lại định nghĩa tích phân xác định của một hàm số.

Định nghĩa 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$. Chia đoạn $[a;b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia $x_i(i = 0,\dots,n)$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

(Mỗi phép chia như thế được gọi là một phép phân hoạch đoạn $[a;b]$, kí hiệu là Π.)

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và $d_{(\Pi)} = \max \Delta x_i, \ \ 1 \leq i \leq n$.

Trên mỗi đoạn $[x_{i-1};x_i]$, ta lấy một điểm tùy ý $\xi_i(i = 1,\dots,n)$ và lập tổng

$$\sigma_\Pi = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1.1}$$

Tổng (1.1) được gọi là tổng tích phân của hàm số $f(x)$ ứng với phép phân hoạch Π.

Nếu giới hạn

$$I = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma_\Pi = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

tồn tại, không phụ thuộc vào phép phân hoạch đoạn $[a;b]$ và cách chọn điểm ξ_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của $f(x)$ trên $[a;b]$ và kí hiệu là

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Khi đó hàm $f(x)$ được gọi là khả tích trên đoạn $[a;b]$.

Chú ý 1.2. Tích phân xác định không phụ thuộc vào việc lựa chọn biến lấy tích phân:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Chú ý rằng để tính diện tích "hình thang cong", người ta xấp xỉ phần được giới hạn bởi một đường cong cho trước nhờ các tổng xác định và đã tìm được diện tích chính xác bằng cách thiết lập giới hạn của các tổng đó. Sau đó, ta tìm giá trị bằng số của giới hạn này trên cở sở sử dụng định lí cơ bản về các phép tính giới hạn.

Để ý rằng, nếu $f(x)$ là liên tục trên $[a;b]$ thì ta có đẳng thức

$$\lim_{\max \Delta_{x_k}\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1.2}$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm nào đó của $f(x)$.

Có nhiều đại lượng khác của hình học, vật lí, ...cũng có thể khảo sát được bằng phương pháp này như thể tích, độ dài, diện tích mặt cũng như các đại lượng vật lí cơ bản như công sinh ra bởi một lực biến đổi tác động từ một khoảng cách cho trước. Trong mỗi trường hợp như vậy, quá trình này thực hiện phép chia khoảng biến thiên độc lập thành các khoảng nhỏ và đại lượng đang xét được tính gần đúng bằng tổng tương ứng, giới hạn của các tổng ấy cho ta giá trị chính xác của đại lượng cần tính dưới dạng một tích phân xác định - được tính toán nhờ các phép tính cơ bản.

Ta cũng thấy rằng những chi tiết của quá trình tính giới hạn của tổng được thực hiện để tìm diện tích dưới dạng đường cong không nhất thiết phải lặp lại để tìm các đại lượng tương tự khác. Hệ thống các kí tự được sử dụng là phức tạp và lặp đi lặp lại nhiều lần gây trở ngại cho tính toán.

Tiếp theo, ta xét một số phương pháp cơ bản sử dụng để tính tích phân xác định.

Trong thực hành, ta đặc biệt chú ý đến một số lớp các hàm khả tích đơn giản và dễ nhận biết sau đây:

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì khả tích trên đoạn đó.

Hàm số $y = f(x)$ bị chặn trên đoạn $[a; b]$ và chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn thì khả tích trên đoạn đó.

Hàm số $y = f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên đoạn $[a; b]$ thì khả tích trên đoạn đó.

Nhận xét rằng có một mối liên hệ mật thiết giữa tích phân xác định và nguyên hàm.

Định lý 1.5 (Về tính khả tích của hàm số)**.** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó khả tích trên đoạn $[a, b]$.

Định lý 1.6. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn [a,b] và $f(x) \leq g(x)$ với mọi x thuộc $[a, b]$ thì

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = g(x)$.

Định lý 1.7 (Phép cộng tích phân)**.**

$$\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b [f(x) + g(x)]dx.$$

Định lý 1.8 (Phép trừ tích phân)**.**

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Định lý 1.9 (Phép nhân tích phân với 1 hằng số)**.**

$$k\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b kf(x)dx.$$

Định lý 1.10 (Công thức đảo cận)**.**

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$$

và

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

Định lý 1.11 (Công thức tách cận)**.**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, c \in [a,b].$$

Định lý 1.12 (Công thức đổi biến số)**.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và hàm số $x = g(t)$ khả vi liên tục trên đoạn $[m,M]$ và $\min\limits_{t\in[m,M]} g(t) = a$; $\max\limits_{t\in[m,M]} g(t) = b; g(m) = a, g(M) = b$. Khi đó ta có

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_m^M f(g(t)).g'(t)dt.$$

Định lý 1.13 (Công thức tích phân từng phần)**.** Giả sử hàm số $u(x)$, $v(x)$ khả vi liên tục trên $[a,b]$, khi đó

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$$

Định lý 1.14 (Công thức Newton-Leibnitz)**.** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của nó trên đoạn đó, thì

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Từ Định lí 1.14, ta thấy ngay rằng việc tính tích phân xác định trở thành đơn giản nếu xác định được biểu thức nguyên hàm tương ứng dưới dạng hiện.

Để tính tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ta thường tìm nguyên hàm $F(x)$ của nó và dùng công thức Newton-Leibnitz.

Trong nhiều bài toán việc tìm nguyên hàm rất phức tạp và khó khăn thậm chí không tìm được nguyên hàm dưới dạng hiện. Vì vậy, nhu cầu tính các tích phân xác định khi chưa tường minh nguyên hàm tương ứng là một bài toán cần được khảo sát chi tiết. Trong những trường hợp đó, nếu biết dựa vào những tính chất đặc biệt của hàm dưới dấu tích phân và những biến đổi thích hợp, ta có thể tính được một số dạng tích phân xác định.

1.1.3 Tích phân đối với hàm chẵn và lẻ

Tính chất 1.1. Nếu hàm số $y = f(x)$ lẻ, liên tục trên $[-a;a]$, với $a > 0$ thì

$$I = \int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0.$$